Chương 3. Đạo hàm và vi phân của hàm số một biến

Hoàng Anh Quân

Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Đạo hàm và vi phân cấp một

3Blue1Brown, Essence of calculus

Link

Timestamp 5:33-5:34 and 8:08-8:41

Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm c thuộc (a, b) nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

Khi đó, số A được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = c$, kí hiệu là $f'(c) = A$.

Định nghĩa 2. Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói $f(x)$ khả vi trong khoảng (a, b).

Nhận xét.
1. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$. Khi đó đồ thị của đường thẳng $y = f'(c)(x - c) + f(c)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
2. Nếu $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty$, ta nói $f(x)$ có đạo hàm vô cùng và tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x = c$ vuông góc với trục hoành.

Luyện tập

Bài tập 1. Tính các đạo hàm của các hàm số sau

$$f(x) = M; \quad g(x) = 2x; \quad h(x) = x^2; \quad k(x) = \frac{1}{x}; \quad p(x) = \sin x$$

Các công thức tính đạo hàm cơ bản

Cho một hằng số c và $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả vi tại điểm x. Khi đó

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = cf'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Nhận xét. Một mẹo để nhớ dấu cộng/trừ trong công thức đạo hàm của $f \cdot g$ và $\frac{f}{g}$ là thay một vài hàm số đơn giản vào biểu thức, ví dụ

$$f(x) = 1, g(x) = x.$$

Đạo hàm của hàm hợp

Đạo hàm của hàm hợp $y = f(g(x))$ được tính theo công thức

$$y'_x = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Bài tập 2. Cho $f(t) = t^2$, $g(t) = t + 5$. Tính đạo hàm (theo biến x) của hàm số $f(g(x))$.

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $y = y(x)$ có hàm ngược $x = x(y)$ và $y'_x \neq 0$, ta suy ra

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Bài tập 3. Tính đạo hàm của hàm số $m(t) = \arcsin t$ trên miền xác định $E = (-1, 1)$.
Bài làm.
Nhận xét: hàm số $m(t)$ có miền xác định E và miền giá trị $F = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Do đó $m \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $\cos m > 0$.

Hàm ngược của $m(t)$ được xác định bởi công thức $t(m) = \sin m$. Chú ý rằng $t'(m) = \cos m \neq 0$ (cmt). Vậy nên đạo hàm của hàm số $m(t)$ là

$$m'(t) = \frac{1}{t'(m)} = \frac{1}{\cos m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Một số đạo hàm cơ bản - giáo trình trang 126

Nhận xét. Ta đã biết $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Hãy tính đạo hàm (theo biến x) của hàm số $f(x) = u^\alpha$ với u là một hàm số theo biến x.
Trả lời. Ta viết $f(x) = m(u(x))$ trong đó $m(t) = t^\alpha$. Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$f'(x) = m'(u(x)) \cdot u'(x) = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

Luyện tập

Bài tập 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $m(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$

b) $n(x) = \ln\left(x^3 + 7x + 2\right)$

c) $p(x) = \sin\left(5 - x^2\right)$

d) $q(x) = \sin^4\left(5 - x^2\right)$

Bài tập 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $m(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $n(x) = x^{1/x}$

c) $p(x) = |\sin x|$

d) $q(x) = \log_x 7$

Gợi ý. Sử dụng biến đổi $u^v = e^{\ln u \cdot v}$ và $|u| = \sqrt{u^2}$.

Mối quan hệ giữa tính khả vi và tính liên tục

Định lý 1. Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$. Khi đó hàm f liên tục tại $x = c$.

Câu hỏi. Biết rằng hàm g liên tục tại $x = c$, có thể suy ra g khả vi tại $x = c$ hay không?

Câu hỏi nâng cao

1. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại 1 điểm.
2. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại 2 điểm.
3. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại vô hạn điểm điểm.
4. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại tất cả điểm.
5. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại 1 điểm.
6. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại 2 điểm.
7. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại vô hạn điểm điểm.
8. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại tất cả điểm.

Vi phân

Cho hàm số f. Tích số $f'(x)\Delta x$ xét tại điểm x được gọi là vi phân của $f(x)$, kí hiệu là df. Ta có

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Xét hàm số $g(x) = x$, theo định nghĩa trên, ta có $dg = g'(x)\Delta x$ hay $dg = \Delta g$. Điều đó suy ra $dx = \Delta x$.

Vậy nên $df = f'(x)dx$ và $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

Đạo hàm một phía, đạo hàm theo tham số

Đạo hàm một phía

Định nghĩa 3.
Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f(x)$ tồn tại đạo hàm trái tại $x = c$ nếu
$f'_-(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ tồn tại.
Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f(x)$ tồn tại đạo hàm phải tại $x = c$ nếu
$f'_+(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ tồn tại.

Định lý 2. Hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$ khi và chỉ khi $f'_-(c) = f'_+(c)$

Bài tập 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{nếu } x > x_0 \end{cases}$$

Tìm a, b sao cho hàm số $f(x)$ liên tục và khả vi tại $x = x_0$.

Đạo hàm theo tham số

Cho $x = f(t), y = g(t)$ trong đó t là một tham số. Khi đó ta có

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Bài tập 7. Tính giá trị y'_x theo tham số t trong các ý sau đây

a) $x = a\cos t, y = a\sin t$

b) $x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

Bài tập về nhà

BTVN buổi 05

Nội dung:

- Ý 1 đến ý 15 bài tập 3 trang 136 sách Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp, tập 2, phép tính giải tích một biến số
- 20 bài trong bài tập 1 đến bài tập 33 trang 71 sách Nguyễn Thủy Thanh, Bài tập Toán Cao Cấp Tập 2

Yêu cầu:

- Tóm tắt đề bài và trình bày lời giải cho các bài toán
- Chụp hoặc scan tất cả phần bài làm, gộp vào **một file pdf duy nhất** (sử dụng app Lens, CamScanner, ...)
- Đặt tên file theo đúng format, một tên ví dụ là `PhieuBaiTap05_HoangAnhQuan_17001234.pdf`
- Nộp bài tập trên Google Classroom trước thời hạn