Chương 2. Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến

Hoàng Anh Quân

Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

1. Giới hạn của hàm số một biến

2. Hàm số liên tục

Giới hạn của hàm số một biến

Đoạn, khoảng, nửa khoảng

Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Ta đưa ra ba định nghĩa về đoạn, khoảng, và nửa khoảng

$$\begin{aligned}
\text{Đoạn}: [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\
\text{Khoảng}: (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \\
\text{Nửa khoảng}: [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \\
\text{Nửa khoảng}: (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta còn sử dụng thêm hai giá trị $+\infty$ và $-\infty$ như là đầu mút của một khoảng, nửa khoảng. Ví dụ như

$$\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in \{z \in \mathbb{R} : 0 < |z - a| < \delta\}$$

Khi đó ta nói $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại $x = a$, kí hiệu là

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Nhận xét.

1. Thay vì nói "$f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại $x = a$", ta có thể nói gọn là "$f(x)$ có giới hạn tại $x = a$"
2. Giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = a$ không được nhắc đến trong định nghĩa về giới hạn của hàm số
3. Chữ ε đọc là epsilon, chữ δ đọc là delta

Bài tập 1. Chứng minh $\lim_{x \to 3} 2x = 6$.

Gợi ý. Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, cần chọn ra một giá trị δ phù hợp.

Bài tập 2. Chứng minh $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Gợi ý. Khi x tiến gần tới 3 thì ta có thể đánh giá $|x+3|$ nhỏ hơn một giá trị cố định nào?

Bài tập 3. Chứng minh $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$.

Bài tập 4. Cho $x \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Ví dụ $[2,4] = 2, [-2.4] = 3$. Chứng minh mệnh đề

$$\lim_{x \to 3} [x] = 3$$

là một mệnh đề sai.

Giới hạn hàm số tại vô cùng

Định nghĩa 2. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = +\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại Δ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x > \Delta.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Định nghĩa 3. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = -\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại Δ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x < \Delta.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Nhận xét. Kí hiệu Δ đọc là delta.

Bài tập 5. Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Tính chất của giới hạn hàm số

Giả sử hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt có giới hạn tại $x = a$ lần lượt là L và K, tức là $\lim_{x \to a} f(x) = L$ và $\lim_{x \to a} g(x) = K$. Khi đó

- $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + K$
- $\lim_{x \to a} C \cdot f(x) = CL$ với C là một hằng số
- $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = KL$
- $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{K}{L}$ với điều kiện $L \neq 0$

Bài tập 6. Với giả thiết như trên, chứng minh $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = L - K$.

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} 5x^2 - 7x + 6$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ với m, n là các số nguyên dương

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Định lý về giới hạn của hàm số

Định lý 1. Cho ba hàm số f, g, h với miền xác định D thỏa mãn

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \forall x \in D$$

Biết rằng tồn tại một giá trị a ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$, hoặc $a = -\infty$) thỏa mãn

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$$

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Bài tập 9. Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Định nghĩa 4.

1. Cho một hàm số $f(x)$. Một số A được gọi là giới hạn bên phải của hàm $f(x)$ tại điểm $x = a$ nếu với mọi tham số $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in \{x : a < x < a + \delta\}.$$
Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$.
2. Cho một hàm số $f(x)$. Một số A được gọi là giới hạn bên trái của hàm $f(x)$ tại điểm $x = a$ nếu với mọi tham số $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in \{x : a - \delta < x < a\}.$$
Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$.

Bài tập 10. Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$.

Bài tập 11. Xác định $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

Bài tập 12. Xác định $\lim\limits_{x \to 3^+} [x]$, $\lim\limits_{x \to 3^-} [x]$.

Định lý về giới hạn một phía

Định lý 2. Hàm số $f(x)$ có giá trị giới hạn tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi tại điểm đó các giới hạn bên phải và bên trái tồn tại và bằng nhau. Trong trường hợp này giới hạn của hàm bằng giới hạn một phía.

Hàm vô cùng bé & hàm vô cùng lớn

Định nghĩa 5.
Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to a$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn khi $x \to a$ (viết là $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$) nếu với mọi $M > 0$ tồn tại δ thỏa mãn

$$|f(x)| > M \quad \forall x \in \{z \in \mathbb{R} : 0 < |z - a| < \delta\}$$

Nhận xét. Một cách tương tự, ta định nghĩa được hàm số vô cùng bé, hàm số vô cùng lớn khi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Ví dụ.

- $d(x) = x$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 0$
- $f(x) = \sin(x)$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 0$
- $g(x) = |x - 3|$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 3$
- $h(x) = \dfrac{1}{|x-3|}$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to 3$
- $k(x) = x^2 - x + 1$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to +\infty$
- $l(x) = -x + 1$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to +\infty$

Định lý 3. Nếu $f(x)$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to a$ thì hàm $\dfrac{1}{f(x)}$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to a$.

Tính chất

Nhận xét. Cho một hằng số c và $f(x), g(x)$ là hai hàm số vô cùng bé khi $x \to a$. Khi đó hàm số $f + g, f - g, c \cdot f$ và $f \cdot g$ cũng là những hàm số vô cùng bé khi $x \to a$.

Câu hỏi.

1. Nhận xét còn đúng khi thay "vô cùng bé" bởi "vô cùng lớn" hay không?
2. Có thể đưa ra nhận xét nào về hàm số $\dfrac{f}{g}$ hay không? Nó là một hàm số vô cùng bé hay vô cùng lớn (khi $x \to a$)?

So sánh các hàm vô cùng bé

Định nghĩa 6. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ vô cùng bé khi $x \to a$. Hai hàm này được gọi là tương đương với nhau nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Một số cặp hàm vô cùng bé tương đương khi xét $x \to 0$

- $\sin x$ và x
- $\tan x$ và x
- $\arcsin x$ và x
- $\arctan x$ và x
- $\ln(1 + x)$ và x
- $a^x - 1$ và x
- $(1 + x)^\alpha - 1$ và αx

Từ các cặp hàm trên, ta suy ra các giới hạn tương ứng, ví dụ như

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1; \ldots$$

Bài tập 13. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 5x} + x$

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Định nghĩa 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in \{x : |x - a| < \delta\}.$$

Nhận xét. Mọi hàm sơ cấp cơ bản đều liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của hàm số đó.

Tính chất

Định lý 4. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều liên tục tại điểm $x = a$. Khi đó

1. Các hàm $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ liên tục tại điểm $x = a$
2. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại điểm $x = a$

Định lý 5. Cho ba hàm số f, g và h thỏa mãn $h = g \circ f$. Biết rằng hàm f liên tục tại điểm a, hàm g liên tục tại điểm $f(a)$. Khi đó hàm h liên tục tại điểm a.

Liên tục bên trái, liên tục bên phải

Định nghĩa 8. Cho hàm số $f(x)$.
Hàm số $f(x)$ liên tục bên phải tại $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
Hàm số $f(x)$ liên tục bên trái tại $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Định lý 6. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ liên tục phải tại $x = a$ và liên tục trái tại $x = a$.

Bài tập 14.

Điểm gián đoạn, điểm gián đoạn khử được

Định nghĩa 9. Cho hàm số $f(x)$. Điểm $x = a$ được gọi là một điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu $f(x)$ không liên tục tại $x = a$.

Định nghĩa 10. Cho hàm số $f(x)$ với điểm gián đoạn $x = a$. Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ tồn tại và thỏa mãn

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$$

thì $x = a$ là một điểm gián đoạn khử được.

Nhận xét. Trong trường hợp này, giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tồn tại (vì giới hạn trái và giới hạn phải đều tồn tại và bằng nhau).

Bài tập 15. Chứng minh $x = 0$ là một điểm gián đoạn khử được của $f(x)$ với

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Điểm gián đoạn loại I, loại II

Định nghĩa 11. Cho hàm số $f(x)$ với điểm gián đoạn $x = a$.

1. Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ tồn tại và thỏa mãn

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

   thì $x = a$ là một điểm gián đoạn loại I.
2. Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ không tồn tại thì $x = a$ là một điểm gián đoạn loại II.

Câu hỏi. Chỉ ra điểm gián đoạn (và phân loại chúng) của những hàm số sau đây

a) $f(x) = [x]$

b) $g(x) = \dfrac{x - |x|}{x^2}$

Hàm liên tục trên đoạn thẳng

Định nghĩa 12.

1. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó.
2. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng (a, b), liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b. Lớp hàm này được kí hiệu là $\mathcal{C}[a, b]$.

Định lý Bolzano-Cauchy I/II

Định lý 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \neq f(b)$. Với mọi số M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = M$.

Nhận xét. Định lý Bolzano-Cauchy có thể được sử dụng để tìm giá trị xấp xỉ của nghiệm của phương trình. Cụ thể, cho $f(x)$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện của định lý 7, không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0, f(b) > 0$. Theo định lý, tồn tại một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thuộc khoảng (a, b). Xét giá trị $f(\frac{a+b}{2})$,

- Nếu $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.
- Nếu $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

Thực hiện liên tiếp thao tác trên, ta thu hẹp được phạm vi của nghiệm.