Chương 1. Tập hợp, dãy số, hàm số

Hoàng Anh Quân

Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Tập hợp

Khái niệm tập hợp

- Ví dụ về tập hợp: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \varnothing$.

- Phần tử của một tập hợp. Kí hiệu toán học $\in, \notin$.

Ví dụ. $1 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Hai cách xác định một tập hợp

+ Liệt kê

$$A = \{5, 6, 7\}\,; B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

+ Nêu đặc trưng

$$C = \left\{x \in \mathbb{Z} : x \,\vdots\, 2\right\}; D = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$$

Mối quan hệ giữa hai tập hợp

Cho hai tập hợp A và B. Ta nói A là một tập con của B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B.

Ví dụ. $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Nhận xét. Cho hai tập hợp A và B. Nếu muốn chứng minh $A = B$, ta cần chỉ ra $A \subset B$ và $B \subset A$.

Các phép toán về tập hợp

Cho A, B là hai tập hợp.

Phép hợp

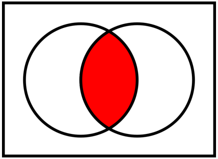
$$A \cup B = \left\{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\right\}$$

Phép giao

$$A \cap B = \left\{x | x \in A \text{ và } x \in B\right\}$$

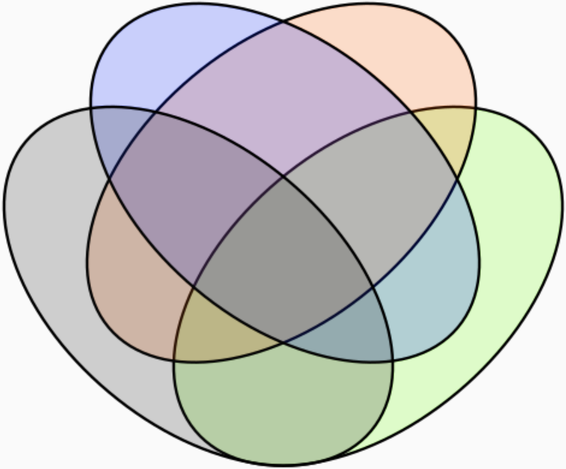
Phép trừ

$$A \setminus B = \left\{x | x \in A \text{ và } x \notin B\right\}$$



Hình 1: Sơ đồ Venn (Venn diagram)

Sơ đồ Venn



Hình 2: Sơ đồ Venn cho bốn tập hợp. Nguồn: Wikipedia

Bài tập 1. Chứng minh

a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$
b) Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = B$
c) Nếu $A \cap B = A$ thì $A \subset B$
d) Nếu $A \cup B = B$ thì $A \subset B$
e) $A \setminus B = C$ có suy ra $A = B \cup C$ không?
f) $A = B \cup C$ có suy ra $A \setminus B = C$ không?
g) $A \cap B \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing, C \cap A \neq \varnothing$ có suy ra $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ không?

Hướng dẫn.
(1a) Xét $x \in A \cap B$ bất kỳ, suy ra $x \in A$ và $x \in B$, tức là $x \in A$. Do đó $A \cap B \subset A$.
Xét $y \in A$ bất kỳ, kết hợp với $A \subset B$, suy ra $y \in B$. Do đó $y \in A$ và $y \in B$, điều này suy ra $y \in A \cap B$. Vậy nên $A \subset A \cap B$.
Tóm lại $A \cap B = A$.

Bài tập 2. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các số nguyên chia hết cho 2, 3 và 6. Chứng minh $A \cap B = C$.

Bài tập 3.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c) Nếu $A \cap C \subset A \cap B$ và $A \cup C \subset A \cup B$ thì $C \subset B$

d) Chứng minh $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Dãy số, giới hạn dãy số

Giá trị tuyệt đối của một số thực

Cho $x \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa giá trị tuyệt đối của x, kí hiệu là $|x|$ như sau

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tính chất

1. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|x| \geq 0; \quad |x| \geq x; \quad |x| \geq -x$$

2. Với $a \geq 0$, ta có

$$|x| \geq a \iff \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right. \qquad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

3. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Bài tập 4. Giải bất phương trình và phương trình

a) $|x + 3| = 7$

b) $|4x - 2| > 4$

c) $|5x - 1| \leq 4$

Dãy số

Dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ thường được viết dưới dạng $\{a_n\}$, với a_n là số hạng tổng quát của dãy.

Ví dụ.

a) $\{a_n\}$ với $a_n = 1 \ \forall n \geq 1$
b) $\{b_n\}$ với $b_n = n \ \forall n \geq 1$
c) $\{c_n\}$ với $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \ \forall n \geq 3$ và $c_1 = 1, c_2 = 1$
d) $\{d_n\}$ với $d_n = (-1)^n \ \forall n \geq 1$
e) $\{e_n\}$ với $e_n = \dfrac{1}{n} \ \forall n \geq 1$
f) $\{f_n\}$ với $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \ \forall n \geq 1$

Giới hạn dãy số

Một giá trị $a \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của dãy $\{a_n\}$, ký hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$$

trong đó giá trị n_0 *phụ thuộc* vào ε.

Nhận xét.

- Định nghĩa trên có thể hiểu là: chênh lệch giữa số hạng trong dãy và giá trị giới hạn có thể nhỏ tùy ý kể từ sau một thời điểm nào đó.
- Giá trị n_0 không nhất thiết là một số nguyên.
- Khi dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn là a, ta còn có thể nói dãy số $\{a_n\}$ hội tụ tới a và có thể viết $\boxed{a_n \to a \text{ khi } n \to \infty.}$
- Trường hợp $\{a_n\}$ không hội tụ tới bất cứ giá trị nào thuộc $\mathbb{R}$, ta nói $\{a_n\}$ là một dãy phân kì.
- Ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và *không viết* $\lim a_n = a$.

Bài tập 5. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Phân tích. Ta cần chứng minh

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon \tag{1}$$

Trước tiên, ta khảo sát (1) với một vài giá trị $\varepsilon > 0$.

- Với $\varepsilon = 2$, ta chọn $n_0 = 1$ thì mệnh đề (1) là đúng.
- Với $\varepsilon = 1$, ta chọn $n_0 = 2$ thì mệnh đề (1) là đúng.
- Với $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ta chọn $n_0 = 5$ thì mệnh đề (1) là sai, do với chỉ số $n = 6$, ta có $|a_6 - 0| = |\frac{1}{6} - 0| = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{10}$.
- Với $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ta chọn $n_0 = 11$ thì mệnh đề (1) là đúng.

Vấn đề ở bài toán này là ta cần giải quyết (1) cho mọi giá trị $\varepsilon > 0$, tức là cần tìm ra cách xác định n_0 phù hợp khi biết trước ε. Ta nhận thấy với ε càng nhỏ thì n_0 phải càng lớn.

Chứng minh.
Ta cần chỉ ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon \tag{2}$$

Thật vậy, xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta cần tìm một giá trị n_0 nào đó sao cho

$$\forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{3}$$

Chọn $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$, ta chỉ ra (3) là đúng thông qua biến đổi sau

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$$

Tóm lại, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại n_0 sao cho (3) là đúng.

Vậy nên mệnh đề (2) là đúng. Từ đó suy ra $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (đpcm). $\square$

Bài tập 6. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Bài tập 7. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tính chất của giới hạn dãy số

- Nếu dãy số $\{a_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

- Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ lần lượt tới A và B. Khi đó

  - $\lim\limits_{n\to\infty}(C + a_n) = C + A$ với một hằng số C nào đó
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n) = CA$ với một hằng số C nào đó
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ với $b_n \neq 0$, $B \neq 0$

- **Định lý kẹp.** Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Biết rằng $x_n \leq y_n \leq z_n$ với mọi n, ngoài ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Áp dụng những tính chất của giới hạn dãy số, giải những bài tập sau

Bài tập 8. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

Bài tập 9. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}.$

Bài tập 10. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1} = 1.$

Bài tập 11. (Áp dụng định lý kẹp) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

Bài tập 12. Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Biết rằng $a_n > b_n$ với mọi $n \geq 1$. Liệu có thể kết luận $A > B$? Nếu không thì hãy xây dựng ví dụ mà trong đó $A \leq B$.

Dãy đơn điệu, dãy bị chặn

Cho dãy số $\{a_n\}$. Khi đó

1. $\{a_n\}$ là một dãy tăng nếu $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \geq 1$,
2. $\{a_n\}$ là một dãy tăng ngặt nếu $a_{n+1} > a_n \ \forall n \geq 1$
3. $\{a_n\}$ là một dãy giảm nếu $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq 1$
4. $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt nếu $a_{n+1} < a_n \ \forall n \geq 1$
5. $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu nếu nó là một dãy tăng hoặc một dãy giảm
6. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho $a_n < M \ \forall n \geq 1$
7. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho $a_n > m \ \forall n \geq 1$
8. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn nếu nó là dãy bị chặn trên và bị chặn dưới

Nhận xét.

- Một dãy tăng là một dãy bị chặn dưới
- Một dãy giảm là một dãy bị chặn trên

Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Nguyên lý được phát biểu như sau:

- Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ
- Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ

Nhận xét. Hai mệnh đề trên có thể được gộp lại thành

Một dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Bài tập 13. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_n = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

là một dãy hội tụ.

Áp dụng nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Bài tập 14. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

là một dãy hội tụ.

Nguyên lý Bolzano-Cauchy

Đọc thêm trong giáo trình.

Hàm số một biến

Định nghĩa

Các phép toán của hàm số

Cho hai hàm số f và g và một hằng số c, ta định nghĩa các hàm số $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $c \cdot f$ như sau

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

Hàm hợp

Hàm ngược

Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trên D_f và có miền giá trị E_f. Nếu mỗi giá trị $y \in E_f$ đều tương ứng với một giá trị $x \in D_f$ mà $f(x) = y$ thì trên tập hợp E_f có thể xác định hàm

$$x = g(y)$$

sao cho mỗi giá trị $y \in E_f$ đều tương ứng với một giá trị $x \in D_f$ mà $f(x) = y$. Khi đó hàm g được gọi là hàm ngược đối với hàm f, kí hiệu là

$$g = f^{-1}.$$

Ví dụ về một hàm ngược

Ví dụ. Xét hàm lượng giác tan : $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Khi đó, hàm tan là một song ánh và ta có thể xây dựng hàm ngược

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

Hàm ngược của hàm tan là hàm arctan.

Nhận xét. Hàm số f và hàm ngược f^{-1} có đồ thị đối xứng vói nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Bài tập 15. Cho hàm số $f : [2, 5] \to [1, 2]$ thỏa mãn $f(x) = \sqrt{x-1}$. Tìm hàm ngược f^{-1} của hàm số f.

Bài tập 16. Cho hàm số $g : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to [-1, 1]$ thỏa mãn $g(x) = \sin 2x$. Tìm hàm ngược g^{-1} của hàm số g.

Hàm số sơ cấp

Nhắc lại các nhóm hàm số sơ cấp cơ bản.

1. Hàm số lũy thừa
2. Hàm số mũ
3. Hàm số logarith
4. Hàm lượng giác
5. Hàm lượng giác ngược $(\arcsin, \arccos, \arctan, \text{arccot})$

Hàm số sơ cấp là những hàm số tạo bởi *hữu hạn lần các phép tính số học* và *các phép lấy hàm hợp* đối với các hàm sơ cấp cơ bản.

Ví dụ.
Hàm số $f(x) = \log^3(x) + \sqrt{x+5}$ là một hàm sơ cấp.
Hàm số $f(x) = |x|$ là một hàm sơ cấp (giải thích?) *Câu hỏi.* Hàm số

$f(x) = x!$ có phải là một hàm sơ cấp hay không?

Kiến thức bổ trợ

Nguyên lý quy nạp toán học

Tình huống yêu cầu chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi số nguyên $n \geq k_0$. Ta giải quyết vấn đề bằng cách sử dụng nguyên lý quy nạp toán học như sau:

- Bước 1. Chứng minh mệnh đề là đúng với $n = k_0$.
- Bước 2. Giả sử mệnh đề là đúng với $n = k$ nào đó, rồi chứng minh mệnh đề là đúng với $n = k + 1$.

Như vậy ta đã chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề với các giá trị $n = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$

Bài tập 17. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi công thức

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \ \forall n \geq 1$$

1. Chứng minh $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$.
2. Chứng minh $a_n < 2 \ \forall n \geq 1$.
3. Chứng minh $a_n < a_{n+1} \ \forall n \geq 1$.
4. Xác định giá trị của $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.